Applications - Injections - Surjections - Bijections

Table des matières

1 Applications

1.1 Définition

Définition 1 : Soit deux ensembles E et F et f une relation de E dans F.

- f est une application si tout élément $x \in E$ possède une image unique $f(x) \in F$.

$$\forall x \in E, \quad \exists!\, y \in F, \quad y = f(x)$$

- L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f et F l'ensemble d'arrivé de f.
- $f(x)$ est appelé l'image de x par f.

  Tout élément $x \in E$ pour lequel $y = f(x)$ est appelé antécédent de y par f.

Remarque :

- On pourrait aussi donner comme définition : un application de E dans F est une partie de $E \times F$ telle que : $\forall x \in E, \quad \exists!\, y \in F, \quad y = f(x)$
- Application et fonction sont synonymes. Des nuances d'ordre pédagogiques sont parfois faites entre les deux termes. Au lycée, on appelle fonction une relation de E dans F telle que chaque élément de E possède au plus une image dans F.

Exemples :

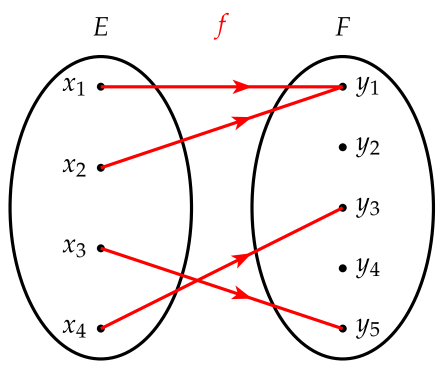
- Une application représentée par un diagramme sagittal.

  x_1 et x_2 ont la même image y_1.

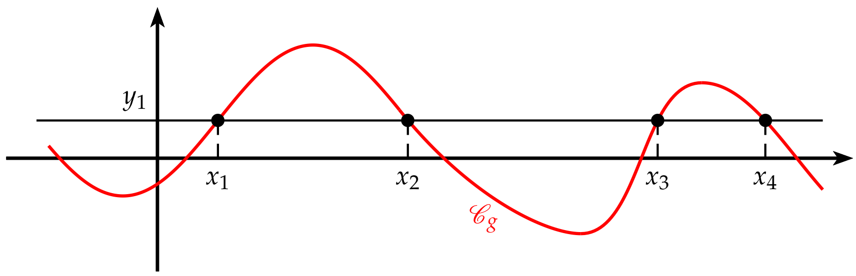
  y_1 a deux antécédents x_1 et x_2.

  Chaque $(x_i)_{i \in [\![1,4]\!]}$ a une image.

  Chaque $(y_i)_{i \in [\![1,5]\!]}$ n'a pas nécessairement un antécédent.



- Une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: y_1 a quatre antécédents x_1, x_2, x_3, x_4



1.2 Image d'une partie, d'une application

Définition 2 : Soient f une application de E dans F et A une partie de E.

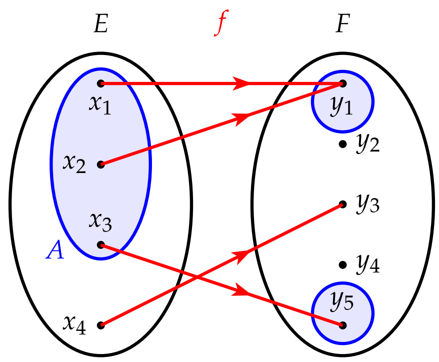
- On appelle image de A par f, l'ensemble, notée $f(A)$, telle que :

$$f(A) = \{y \in F,\ \exists\, a \in A,\ y = f(a)\} = \{f(a)\}_{a \in A}$$

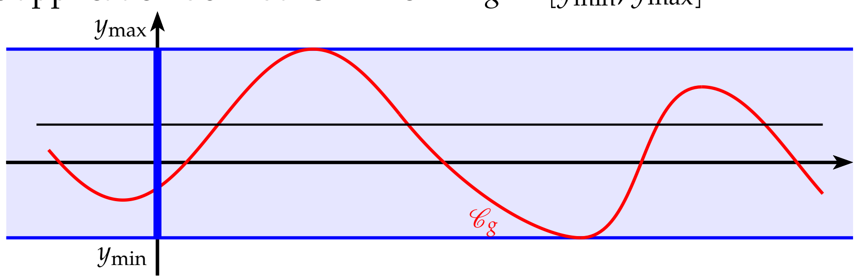
- L'image de E est appelée image de f et notée $\operatorname{Im} f$

Exemples :

- $A = \{x_1, x_2, x_3\}$
  $f(A) = \{y_1, y_5\}$
  $\operatorname{Im} E = \{y_1, y_3, y_5\}$



- Pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ici $\operatorname{Im} g = [y_{\min}, y_{\max}]$



1.3 Image réciproque d'une partie

Définition 3 : Soient f une application de E dans F et B une partie de F.

On appelle image réciproque de B par f, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$, tel que :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$

⚠ La notation $f^{-1}(B)$ pourrait faire penser que la fonction réciproque f^{-1} existe, ce qui n'est pas le cas si f n'est pas bijective. La notation $f^{-1}(B)$ fait simplement référence à une partie de E.

Exemples :

- Par rapport à nos deux exemples, on peut écrire :

$$f^{-1}(\{y_1, y_5\}) = \{x_1, x_2, x_3\} \quad \text{et} \quad g^{-1}([y_{\min}, y_{\max}]) = \mathbb{R}$$

- Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$.

$$f^{-1}([-1\,;\,1]) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f^{-1}([0\,;\,1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k2\pi\,;\,k2\pi + \pi]$$

1.4 Composition d'applications

Définition 4 : Soient f et g deux applications, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
L'application composée de f suivie de g, notée $g \circ f$, est telle que :

$$g \circ f : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g\left[f(x)\right] \end{cases}$$

Remarque : On ne peut pas nécessairement définir la composée $f \circ g$ à partir des mêmes ensembles. Dans le cas où cela serait possible, la composée de deux applications n'est pas commutative, en général : $g \circ f \neq f \circ g$

1.5 Ensemble d'applications

Définition 5 : L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathscr{F}(E, F)$

⚠ L'ensemble des applications de E dans F : notation F^E

1.6 Restriction et prolongement d'une application

Définition 6 : Soit A une partie de E.

- Soit $f : E \to F$ une application.
  On appelle restriction de f à A l'application notée $f_{|A}$ de A dans F telle que :
  $$\forall x \in A, \quad f_{|A}(x) = f(x)$$
- Soit $f : A \to F$ une application.
  On appelle prolongement de f à E l'application notée g de E dans F telle que :
  $$\forall x \in A, \quad f(x) = g(x)$$

Remarque : Quand une fonction admet une limite à l'une des bornes ouvertes finies de son ensemble de définition, on peut prolonger la fonction par continuité.

Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Or $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

On prolonge alors la fonction f sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

2 Injections

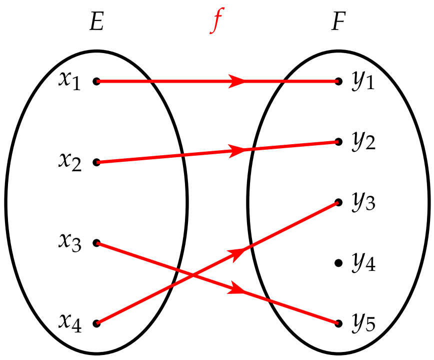
2.1 Définition

Définition 7 : Soit l'application f de E dans F.
f est injective sur E si tout élément de F possède au plus un antécédent :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

Remarque :
On a le diagramme sagittal suivant :
Certains éléments de F peuvent ne pas avoir d'antécédent. C'est la cas ici de y_4.
$\operatorname{Im} f = \{y_1, y_2, y_3, y_5\} \neq F$

$\operatorname{card}(E) \leqslant \operatorname{card}(F)$



Exemple : L'application $f : z \mapsto f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ est injective sur $\mathbb{C} / \{i\}$ car :

$$\frac{z_1+i}{z_1-i} = \frac{z_2+i}{z_2-i} \;\Rightarrow\; (z_1+i)(z_2-i) = (z_1-i)(z_2+i) \;\Rightarrow$$

$$z_1 z_2 + i(z_2 - z_1) + 1 = z_1 z_2 + i(z_1 - z_2) + 1 \;\Rightarrow\; z_2 - z_1 = z_1 - z_2 \;\Rightarrow$$

$$2(z_2 - z_1) = 0 \;\Rightarrow\; z_2 = z_1$$

2.2 Injection et composition

Définition 8 : Soient f et g deux applications, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective

Remarque : Si $g \circ f$ est injective alors g rien du tout.

Contre exemple f et g sont respectivement la fonction exponentielle et la fonction carrée définies sur $\mathbb{R}$.

- La fonction exponentielle est injective
- $g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ donc $g \circ f$ est injective.
- La fonction carrée n'est pas injective car 4 a deux antécédents 2 et -2.

Démonstration :

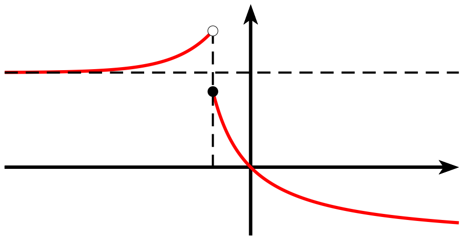
- f et g injectives.
  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \;\Rightarrow\; g\,[f(x_1)] = g\,[f(x_2)] \overset{g \text{ injective}}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ injective}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$
- $g \circ f$ injective

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{\text{composition par } g}{\Rightarrow} g\,[f(x_1)] = g\,[f(x_2)] \overset{g\circ f \text{ injective}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

2.3 Injectivité par stricte monotonie sur une partie de R

Théorème 1 : Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur A alors f est injective sur A

Remarque : La réciproque est fausse car f peut être injective sur A sans être monotone sur A. Dans ce cas la fonction f n'est pas continue sur A.



Exemples :

- La fonction cos est injective sur $[0\,;\,\pi]$ car strictement décroissante. On en déduit l'implication sur $[0\,;\,\pi]$, $\cos x = \cos y \quad\Rightarrow\quad x = y$.
  Il est à remarquer que cette implication n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$ car la fonction cos est périodique.

- Montrons que $\forall x, y \in]-1\,;\,1[,\ \arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$

  $\forall x \in]-1\,;\,1[,\ \ \arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right[\quad\Rightarrow\quad \arctan x + \arctan y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

  $$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{\tan\arctan x + \tan\arctan y}{1 - \tan\arctan x \tan\arctan y} = \frac{x+y}{1-xy} = \tan\arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

  La fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc injective et l'on peut alors simplifier par « tan » d'où $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$

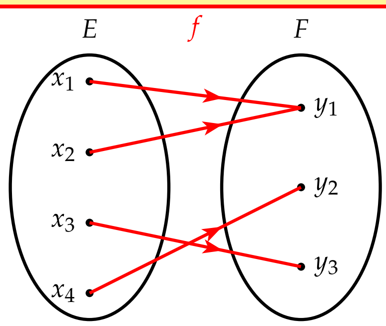
3 Surjections

3.1 Définition

Définition 9 : Soit f une application de E dans F.
f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E.
On a alors $\operatorname{Im} f = F$

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x)$$

Remarque :
On a le diagramme sagittal suivant :



Certains éléments de F peuvent avoir plusieurs d'antécédents, ici y_1.

$\operatorname{Im} f = \{y_1, y_2, y_3\} = F$

$\operatorname{card}(E) \geqslant \operatorname{card}(F)$

Exemple : La fonction carrée est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$

3.2 Surjectivité et composition

Théorème 2 : Soient f et g deux applications, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

Remarque : Si $g \circ f$ est surjective alors f rien du tout. Contre-exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto (e^x)^2 = e^{2x} \end{cases}$$

$g \circ f$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, car par exemple (-1) n'a pas d'antécédent.

Démonstration :

- $\left.\begin{array}{lll} g \text{ surjective} & \Rightarrow & \forall z \in G,\ \exists y \in F, \quad z = g(y) \\ f \text{ surjective} & \Rightarrow & \forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z = g\left[f(x)\right] = g \circ f(x)$

  $g \circ f$ est surjective.
- $g \circ f$surjective $\Rightarrow \forall z \in G,\ \exists x \in E,\ z = g\left[f(x)\right] \Rightarrow \exists y = f(x) \in F,\ z = g(y)$

  g est surjective.

4 Bijections

4.1 Définition

Définition 10 : Soit f une application de E dans F.

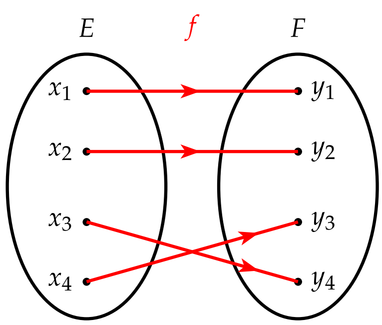
f est bijective sur F si f est injective et surjective. Tout élément de F possède un et un seul antécédent dans E.

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E, \quad y = f(x)$$

Remarque :

On a le diagramme sagittal suivant :

card(E) = card(F)



Exemples :

- La fonction cube est bijective sur $\mathbb{R}$.
- Application aux fonctions réelles.
  Soit une fonction f strictement croissante et continue sur $[a, b]$.
  – f est strictement croissante sur $[a, b]$ donc f est injective sur $[a, b]$, la fonction f est alors bijective sur $\operatorname{Im} f = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
  – f est continue sur $[a, b]$ donc f est surjective sur $[f(a), f(b)]$
  – f est injective et surjective donc f est bijective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$
  Voici démontré le théorème des valeurs intermédiaires !

4.2 Application réciproque

Théorème 3 : Si une application f est bijective de E sur F, alors il existe une unique application réciproque, noté f^{-1} de F sur E telle que :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \ \text{ et } \ f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Si l'on peut trouver une application réciproque f^{-1} à l'application f alors f est bijective.

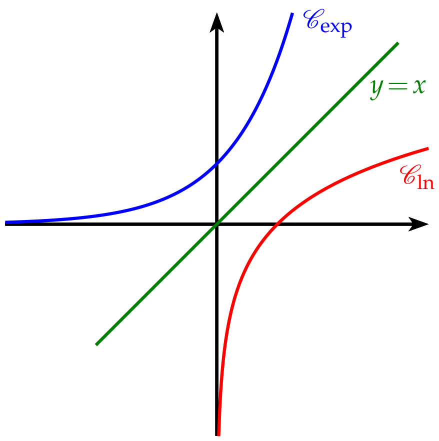
Remarque :

- L'idée d'une application réciproque est de pouvoir « revenir en arrière », c'est possible uniquement si l'application est bijective.
- Dans le cas d'une bijection f définie d'une partie de $\mathbb{R}$ sur une partie de $\mathbb{R}$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la 1re bissectrice d'équation $y = x$

Exemples :

- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$: la fonction ln

  Les courbes $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la 1re bissectrice d'équation $y = x$



- Réciproque de l'application f définie de $\mathbb{C} / \{i\}$ dans $\mathbb{C} / \{1\}$ par : $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

$$z' = \frac{z+i}{z-i} \quad \Leftrightarrow \quad zz' - iz' = z + i \quad \Leftrightarrow \quad z(z'-1) = i(z'+1) \quad \overset{z' \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad z = \frac{i(z'+1)}{z'-1}$$

f^{-1} est une bijection définie de $\mathbb{C} / \{1\}$ sur $\mathbb{C} / \{i\}$ par : $f^{-1}(z) = \dfrac{i(z+1)}{z-1}$.

Définition 11 : Une application f de E dans E est involutive si : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
f est alors une bijection et $f^{-1} = f$

Exemple : La fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une application involutive. En effet lorsque l'on prend l'inverse de l'inverse d'un nombre on retrouve ce nombre.

4.3 Bijectivité, réciproque et composition

Théorème 4 : Soient f et g deux applications, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f est bijective de E sur F alors f^{-1} est bijective de F sur E et : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
- Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⚠ Ordre dans la réciproque de la composée : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Démonstration : f et g bijectives, en utilisant l'associativité de la composée :

- $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$
- $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_E \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_F$

La réciproque de $g \circ f$ est bien $f^{-1} \circ g^{-1}$.