République du Sénégal
Ministère de l'Education Nationale
INSPECTION D'ACADEMIE DE TAMBACOUNDA
CELLULE ZONALE DE KOUMPENTOUM
ANNEE SCOLAIRE 2023-2024

CORRECTION DU DEVOIR ZONAL DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

Classe de TS2

Exercice 1

A.

1. Le point A d'affixe $z = x + iy$ est sur l'axe des abscisses si $Im(z) = 0$.

$Im(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Donc la bonne réponse c'est **b)**.

2. L'écriture exponentielle du nombre $z = -1 + i\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Soit θ un argument z. On a : $\left.\begin{matrix} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$. Donc $z = 2e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ainsi la bonne réponse est **d)**.

3. Soit z un nombre complexe dont un de ses arguments est θ.

$arg\left(z^2(1+i)\right) = \arg(z^2) + \arg(1+i) = 2 \times \arg(z) + \arg(1+i) = 2\theta + \arg(1+i) = 2\theta + \frac{\pi}{4}$
car $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $1 + i$ donc un argument de $z^2(1+i)$ est $2\theta + \frac{\pi}{4}$. Par suite la bonne réponse est **c)**.

4. Soit $z = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. La forme algébrique de z^{2024} est :

$$z = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow z^{2024} = \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2024} = cos\left(\frac{2024\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{2024\pi}{4}\right)$$

$$= cos(506\pi) + i\, sin(506\pi) = cos(0) + i\, sin(0) = 1$$

Donc la bonne réponse est **c)**.

B. Répondre par **vraie** ou **faux** aux affirmations suivantes.

- **a.** Toute suite croissante et majorée converge. **Vraie**
- **b.** Toute suite décroissante et majorée converge. **Faux**
- **c.** Une suite arithmétique est décroissante si et seulement si sa raison est positive. **Faux**
- **d.** Si q est un nombre réel tel que : $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. **Vraie**

Exercice 2

$P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (8-4i)z + 4i - 12$.

1. a. Montrons que le polynôme $P(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.
Soit b un nombre réel.
bi est une racine de $P(z) \Leftrightarrow P(bi) = 0$

$$\Leftrightarrow (bi)^3 - (5+i)(bi)^2 + (8-4i)(bi) + 4i - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow -b^3 i - (5+i)(-b^2) + (8-4i)(bi) + 4i - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow -b^3 i + 5b^2 + ib^2 + 8bi + 4b + 4i - 12 = 0$$

M NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

$$\Leftrightarrow 5b^2+4b-12+(-b^3+b^2+8b+4)i=0$$
$$\Leftrightarrow 5b^2+4b-12+(-b^3+b^2+8b+4)i=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b^2+4b-12=0 \\ -b^3+b^2+8b+4=0 \end{cases}$$

$5b^2+4b-12=0$

$\Delta = 16+240=256$ donc $\sqrt{\Delta}=16$

$b_1=\dfrac{-4-16}{10}=\dfrac{-20}{10}=-2 \quad et \quad b_2=\dfrac{-4+16}{10}=\dfrac{-12}{10}=-\dfrac{6}{5}$

$-(-2)^3+(-2)^2+8(-2)+4=8+4-16+4=16-16=0$

$-\left(-\dfrac{6}{5}\right)^3+\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2+8\left(-\dfrac{6}{5}\right)+4=\dfrac{216}{125}+\dfrac{36}{25}-\dfrac{48}{5}=\dfrac{216+180-1200}{125}=-\dfrac{804}{125}$

$b_1=-2$ vérifie la 2ème équation du système tandis que $b_2-\frac{6}{5}$ ne vérifie pas la 2ème équation donc $b_1=-2$ est la solution du sytème. Par suite $b=-2$. Ainsi $-2i$ est la solution imaginaire pure de $P(z)$.

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.

Comme $-2i$ est une racine de $P(z)$ alors on a le tableau suivant :

	1	$-5-i$	$8-4i$	$-12+4i$
$-2i$	$\downarrow$	$-2i$	$-6+10i$	$12-4i$
	1	$-5-3i$	$2+6i$	0

$P(z)=(z+2i)(z^2-(5+3i)z+2+6i)$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2-(5+3i)z+2+6i)=0$

$\Leftrightarrow z+2i=0 \ ou \ z^2-(5+3i)z+2+6i=0$

$\Leftrightarrow z=-2i \ ou \ z^2-(5+3i)z+2+6i=0$

$$\Delta=[-(5+3i)]^2-4\times 1\times(2+6i)$$
$$=25+30i-9-8-24i$$
$$=8+6i$$

Déterminons les racines carrées de Δ.

Soit $\delta = x+iy$ un nombre complexe tel que $\delta^2=\Delta$.

$$\delta^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ 2xy=6 \\ x^2+y^2=\sqrt{8^2+6^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ xy=3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

En additionnant la 1ère et 3ème équation du système, on obtient : $2x^2=18$.

$2x^2=18 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \ ou \ x=-3$.

$x^2+y^2=10 \Leftrightarrow y^2=10-x^2 \Leftrightarrow y^2=10-9 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=1 \ ou \ y=-1$.

$xy=3 \Longrightarrow xy>0 \Longrightarrow x \ et \ y$ sont de même signe. Ainsi si $x=3$ alors $y=1$ et si $x=-3$ alors $y=-1$. Donc les racines carrées de Δ sont : $3+i \ et \ -3-i$.

Ainsi on a : $z_1=\frac{5+3i+3+i}{2}=\frac{8+4i}{2}=4+2i$ et $z_2=\frac{5+3i-3-i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$.

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=-2i \ ou \ z=4+2i \ ou \ z=1+i$.

$\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{-2i\,;4+2i\,;1+i\}}$

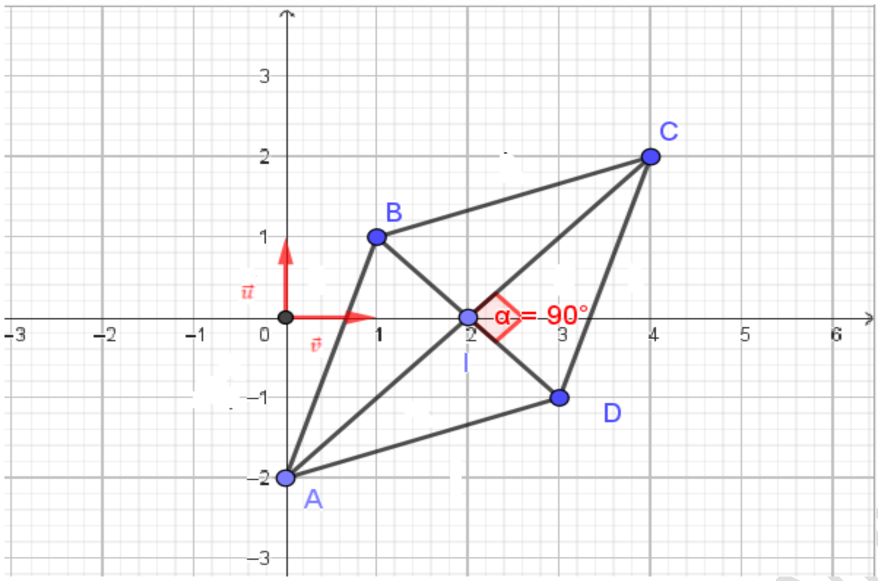
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}\,;\ \vec{v})$, on considère les points $A(-2i);\ B(1+i)\,;\ C(4+2i)\ et\ I(2)$.

a. Vérifions que I est le milieu du segment $[AC]$.

$\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-2i+4+2i}{2}=\frac{4}{2}=2=z_I$ donc I est le milieu du segment $[AC]$.

b. Plaçons les points $A, B, C\ et\ I$ dans le repère.

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI



3. **a.** Calculons $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|$.

$$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = \left|\frac{-2i-1-i}{4+2i-1-i}\right| = \left|\frac{-1-3i}{3+i}\right| = \frac{|-1-3i|}{|3+i|} = \frac{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$$

$$\boxed{\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = 1}$$

c. Déduisons-en la nature du triangle ABC.

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = 1 \Leftrightarrow BA = BC \Leftrightarrow ABC$ est un triangle isocèle en B.

4. Soit D le symétrique de B par rapport au point I.

a. Déterminons l'affixe Z_D du point D.

D est le symétrique de B par rapport au point $I \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{ID}} = z_{\overrightarrow{BI}} \Leftrightarrow z_D - z_I = z_I - z_B$
$\Leftrightarrow z_D = z_I + z_I - z_B \Leftrightarrow z_D = 2z_I - z_B \Leftrightarrow z_D = 2\times 2 - 1 - i \Leftrightarrow z_D = 3 - i.$ $\boxed{z_D = 3-i}$.

b. Montrons que $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D} = \frac{-2i-4-2i}{1+i-3+i} = \frac{-4-4i}{-2+2i} = \frac{-2(2+2i)}{-2(1-i)} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2+2i+2i-2}{1+1} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D} = 2i$; donc $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

c. Déduisons-en que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Comme le point I est le milieu des segments [AC] et [BD] alors le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales de même milieu donc c'est un parallélogramme. De plus $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D} \in i\mathbb{R}^*$ autrement dit les droites (AC) *et* (BD) sont perpendiculaires. En somme ABCD est un parallélogramme dont ses diagonales sont perpendiculaires ; donc c'est un losange. Ainsi $ABCD$ est un losange.

Exercice 3 --

Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudions les variations de h.

$D_h = [-1\,;\,+\infty[$.

h est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et on a :

$$h'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{2}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \quad donc \quad \boxed{h'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}}}.$$

$h'(x) > 0$ *pour tout* $x \in]-1\,;+\infty[$, donc h est strictement croissante sur cet intervalle.

$h(-1) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$0 \nearrow +\infty$

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

$u_1 = h(u_0) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < u_0 < u_1 < 1$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Supposons que la propriété est vraie au rang n $(avec\ n > 0)$ c'est-à-dire $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

$0 < u_n < u_{n+1} < 1 \Leftrightarrow h(0) < h(u_n) < h(u_{n+1}) < h(1)$ car h est croissante.

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

$\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Déduisons-en que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite.

$0 < u_n < u_{n+1} < 1 \Longrightarrow u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

$0 < u_n < u_{n+1} < 1 \Longrightarrow u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers un réel l qui est une solution de l'équation $h(x) = x$.

$h(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x$

$\Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = x^2$

$\Leftrightarrow 1 + x = 2x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente à termes positifs donc elle converge vers un réel positif.

Par suite $l = 1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

c. Montrons que pour tout $x \in [-\frac{1}{2};\ +\infty[$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$x \in [-\frac{1}{2};\ +\infty[\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 + x \geq 1 - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 + x \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+x}{2} \geq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{4}}$

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{1+x}{2}} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) \leq \frac{1}{2}$$

comme h'(x) est positive alors $h(x) = |h'(x)|$ donc $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d. Démontrons en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

h est dérivable sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $\forall\, x \in [-\frac{1}{2} ; +\infty[$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n *et* 1 appartiennent à $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$$|h(u_n) - h(1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1| \Leftrightarrow |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

e. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1| \Leftrightarrow \frac{|u_{n+1} - 1|}{|u_n - 1|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|u_1 - 1|}{|u_0 - 1|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|u_2 - 1|}{|u_1 - 1|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|u_3 - 1|}{|u_2 - 1|} \leq \frac{1}{2}$$

.

.

.

$$\frac{|u_{n-1} - 1|}{|u_{n-2} - 1|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|u_n - 1|}{|u_{n-1} - 1|} \leq \frac{1}{2}$$

En faisant un produit membre à membre de ces n relations on obtient :

$$\frac{|u_1 - 1|}{|u_0 - 1|} \times \frac{|u_2 - 1|}{|u_1 - 1|} \times \frac{|u_3 - 1|}{|u_2 - 1|} \times \ldots \times \frac{|u_{n-1} - 1|}{|u_{n-2} - 1|} \times \frac{|u_n - 1|}{|u_{n-1} - 1|} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|u_n - 1|}{|u_0 - 1|} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

$$\Leftrightarrow |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - 1\right|$$

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

$\Leftrightarrow |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|-\frac{1}{2}\right|$

$\Leftrightarrow |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

c. Retrouvons la limite de la suite (u_n).

$|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Problème --

Soit $f(x) = \begin{cases} -x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \ \ si\ x \in [1;\ +\infty[\\ x - \frac{1}{2} + \sqrt{|x^2 - 1|} \ \ si\ \ x \in]-\infty; 1[\end{cases}$

1. Justifions que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Posons $\begin{cases} f_1(x) = -x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \ \ si\ x \in [1;\ +\infty[\\ f_2(x) = x - \frac{1}{2} + \sqrt{|x^2 - 1|} \ \ si\ \ x \in]-\infty; 1[\end{cases}$

$f_1(x) \exists\ \ ssi\ \ x + 3 > 0\ et\ x \in [1\ ;\ +\infty[$

$ssi\ x > -3\ et\ x \in [1;\ +\infty[$

$ssi\ x\ \ \in]-3; +\infty[\ et\ x \in [1;\ +\infty[$

$ssi\ x \in]-3\ ; +\infty[\cap [1;\ +\infty[$

$ssi\ \ x \in [1;\ +\infty[$

$D_{f_1} = [1; +\infty[$

$f_2(x) \exists\ ssi\ |x^2 - 1| \geq 0\ \ et\ x \in]-\infty; 1[$

$ssi\ x \in \mathbb{R}\ et\ x \in]-\infty; 1[$

$ssi\ x \in \mathbb{R} \cap]-\infty; 1[$

$ssi\ x \in]-\infty; 1[$

$D_{f_2} =]-\infty; 1[$

$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = [1; +\infty[\cup]-\infty; 1[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2. Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue.

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1\ \ ou\ \ x = 1.$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 1	$\quad$ $+\infty$
$x^2 - 1$	$+$ $\quad$ 0	$-$ $\quad$ 0	$+$
$\lvert x^2 - 1\rvert$	$x^2 - 1$	$-x^2 + 1$	$x^2 - 1$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} \ \ si\ x \in [1;\ +\infty[\\ x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{-x^2 + 1} \ \ si\ \ x \in [-1; 1[\\ x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - 1} \ \ si\ \ x \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

3. Etudions la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 1.

La continuité en -1

$f(-1) = -\frac{3}{2}$.

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-1} = -1 - \frac{1}{2} + \sqrt{(-1)^2-1} = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} x - \frac{1}{2} + \sqrt{-x^2+1} = -1 - \frac{1}{2} + \sqrt{-(-1)^2+1} = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1)$ donc f est continue en -1.

La continuité en 1

$f(1) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x - \frac{1}{2} + \sqrt{-x^2+1} = 1 - \frac{1}{2} + \sqrt{-(1)^2+1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} -x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x+3}} = -1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

La dérivabilité de f en -1

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{2}}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1^-} 1 + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-1^-} 1 + \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-1^-} 1 + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-1^-} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-1^-} x-1 = -2 \\ \lim_{x\to-1^-} \sqrt{x^2-1} = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-1^-} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche de -1. Par conséquence f n'est pas dérivable en -1. L'élève peut se limiter ici sans étudier la dérivabilité à droite de -1.

(C_f) admet une demi-tangente verticale orienté vers le haut à gauche de -1. (L'interprétation n'est pas obligatoire)

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-\frac{1}{2}+\sqrt{-x^2+1}+\frac{3}{2}}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x+1+\sqrt{-x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} 1 + \frac{\sqrt{-x^2+1}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1^+} 1 + \frac{\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2}{(x+1)\sqrt{-x^2+1}} = \lim_{x\to-1^+} 1 + \frac{-x^2+1}{(x+1)\sqrt{-x^2+1}} = \lim_{x\to-1^+} 1 + \frac{-(x+1)(x-1)}{(x+1)\sqrt{-x^2+1}} = \lim_{x\to-1^+} 1 + \frac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-1^+} -(x-1) = 2 \\ \lim_{x\to-1^+} \sqrt{-x^2+1} = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} \frac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+1}} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} 1 + \frac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+1}} = +\infty.$$

$\boxed{\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty}$ Donc f n'est pas dérivable à gauche de -1.

(C_f) admet une demi-tangente verticale orienté vers le haut à droite de -1. (L'interprétation n'est pas obligatoire).

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

La dérivabilité de f en 1.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-\frac{1}{2}+\sqrt{-x^2+1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1+\sqrt{-x^2+1}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}1+\frac{\sqrt{-x^2+1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}1+\frac{\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2}{(x-1)\sqrt{-x^2+1}}=\lim_{x\to1^-}1+\frac{-x^2+1}{(x-1)\sqrt{-x^2+1}}=\lim_{x\to1^-}1+\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{-x^2+1}}=\lim_{x\to1^-}1+\frac{-(x+1)}{\sqrt{-x^2+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=-2\\ \lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{-x^2+1}=0^+\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{x\to1^-}\frac{-(x+1)}{\sqrt{-x^2+1}}=-\infty\Longrightarrow\lim_{x\to1^-}1+\frac{-(x+1)}{\sqrt{-x^2+1}}=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$ Donc f n'est pas dérivable à gauche de 1. Par conséquent f n'est pas dérivable en 1. L'élève peut se limiter ici sans étudier la dérivabilité à droite de 1.

(C_f) admet une demi-tangente verticale orientée vers le haut à gauche de 1. (L'interprétation n'est pas obligatoire).

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-x+1+\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(-2x+1)\sqrt{x+3}+2}{2(x-1)\sqrt{x+3}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{[(-2x+1)\sqrt{x+3}+2][(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}{2(x-1)\sqrt{x+3}[(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}=\lim_{x\to1^+}\frac{\left((-2x+1)\sqrt{x+3}\right)^2-(2)^2}{2(x-1)\sqrt{x+3}[(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(4x^2-4x+1)(x+3)-4}{2(x-1)\sqrt{x+3}[(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x^3+8x^2-11x-1}{2(x-1)\sqrt{x+3}[(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(4x^2+12x+1)}{2(x-1)\sqrt{x+3}[(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x^2+12x+1}{2\sqrt{x+3}[(-2x+1)\sqrt{x+3}-2]}=-\frac{17}{16}$$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{17}{16}$ Donc f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1)=-\frac{17}{16}$.

La droite d'équation $y=-\frac{17}{16}x+\frac{25}{16}$ est une demi-tangente à (C_f) à droite de 1. (L'équation de la demi-tangente n'est pas obligatoire).

4. Etudions les limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-1}\right]\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2-1}\right]}{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+\frac{1}{4}-x^2+1}{x-\frac{1}{2}-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\frac{5}{4}}{x-\frac{1}{2}+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{5}{4x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{2x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{5}{4x}}{1-\frac{1}{2x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x+1+\frac{1}{\sqrt{x+3}}=-\infty$ $\qquad\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$

5. **a.** Montrons que la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}-x+1+\frac{1}{\sqrt{x+3}}-(-x+1)=\lim_{x\to+\infty}-x+1+\frac{1}{\sqrt{x+3}}+x-1$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+3}}=0$; donc la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

b. Précisons le comportement de (C_f) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$ donc la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

6. a. Calculons la fonction dérivée de f dans chacun des intervalles où elle est dérivable.

f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\left(-x+1+\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)'=-1+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2}=-1-\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}=-\left(1+\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}\right)$$

f est dérivable sur $]-1;1[$ et on a :

$$f'(x)=\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{-x^2+1}\right)'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{-x^2+1}}=1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}$$

f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et on a :

$$f'(x)=\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-1}\right)'=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\left(1+\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}\right) & si\ x\in]1;\ +\infty[\\ \frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}} & si\ \ x\in]-1;1[\\ \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} & si\ \ x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

b. Montrons que $f'(x)$ est négative sur les intervalles $]-\infty\,;-1[$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[\ \ et\ \ ]1\,;\ +\infty[$ et positive sur $\left]-1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Sur $]1;+\infty[$ on a $f'(x)=-\left(1+\frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}\right)$ donc $f'(x)$ est strictement négative sur cet intervalle.

Sur $]-1;1[$ on a $f'(x)=\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}$.

$$f'(x)\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}\le 0\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+1}-x\le 0\ \ et\ x\in]-1;1[\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+1}\le x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ -x^2+1\ge 0\ \ et\ x\in]-1\,;1[\\ -x^2+1\le x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\in[-1\,;1]\ \ et\ x\in]-1\,;1[\\ -2x^2+1\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\in[-1;1]\\ x\in\left]-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\end{cases}et\ x\in]-1;1[\ \Leftrightarrow x\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]\ et\ x\in]-1;1[$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]\right)\cap]-1;1[\Leftrightarrow x\in\left]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[$$

Donc on a : $\begin{cases}f'(x)\le 0\ si\ x\in\left]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[\\ f'(x)>0\ si\ x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\end{cases}$

Sur $]-\infty;-1[$ on a $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$f'(x)\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-1}+x\le 0\ et\ x\in]-\infty;-1[\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-1}\le -x\ \ et\ x\in]-\infty;-1[\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-x\ge 0\\ x^2-1\ge 0\ \ et\ x\in]-\infty;-1[\\ x^2-1\le x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2-1\ge 0\ \ \ et\ \ x\in]-\infty;-1[\\ x^2-1-x^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in]-\infty;0]\\ x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\ \ et\ \ x\in]-\infty;-1[\\ -1\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in]-\infty;0]\\ x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\ \ et\ \ x\in]-\infty;-1[\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cap]-\infty;-1[\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[$$

M. NDIAYE LYCEE DE MALEME NIANI

Donc on a : $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in]-\infty; -1[$

Donc en résumé on a : $\begin{cases} f'(x) \leq 0 \ si \ x \in]-\infty; -1[\cup \left]-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[\cup]1; +\infty[\\ f'(x) > 0 \ si \ x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\end{cases}$

7. Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $\quad -\infty$	$\|$	$+\infty$ $\quad +$	0	$-$ $\quad -\infty$	$\|$	$-\frac{17}{16}$ $\quad -$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

8. Soit g la restriction de f sur $[1;\ +\infty[$.

a. Montrer que g est une bijection.

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

b. Dressons le tableau de variation de g^{-1}.

Comme $g \ \ et \ g^{-1}$ ont les mêmes variations alors g^{-1} est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$(g^{-1})'$		$-$	
(g^{-1})	$+\infty$	$\searrow$	1

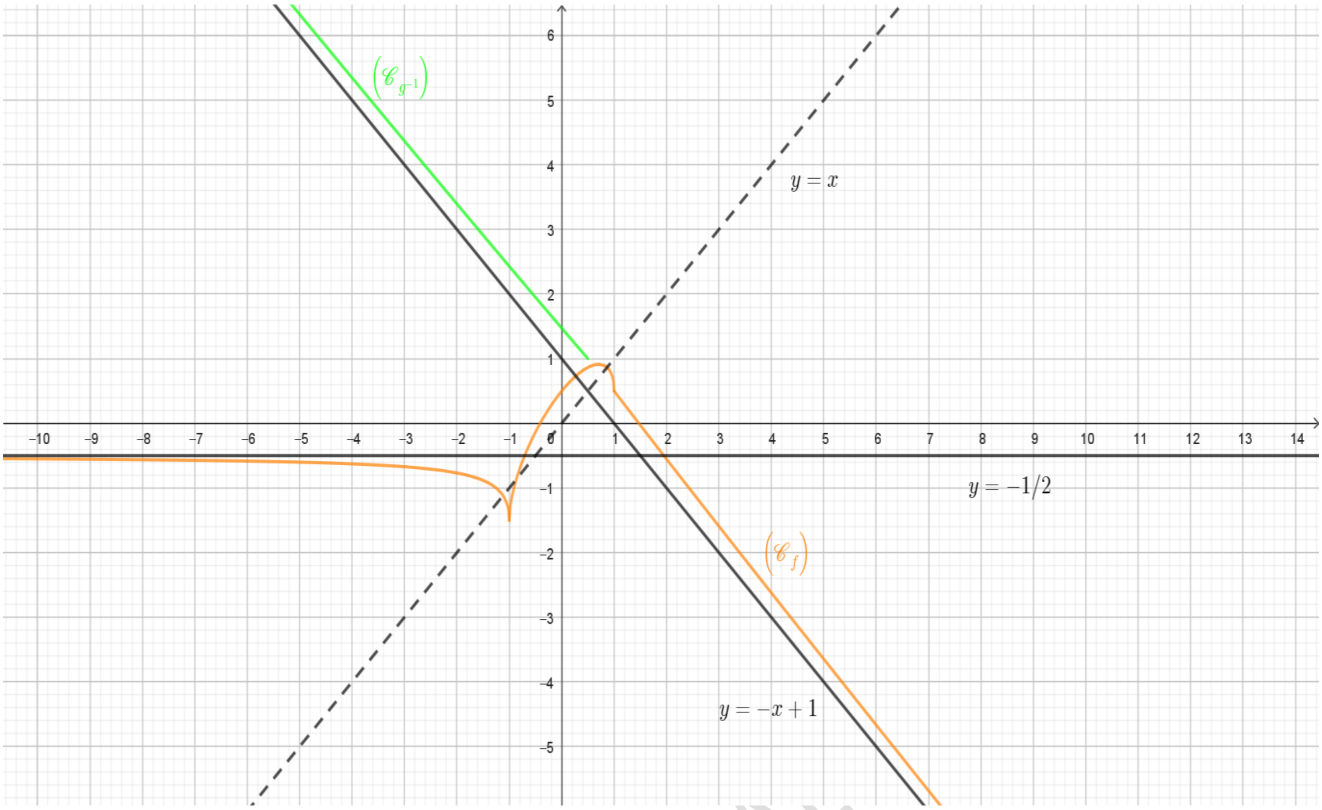
c. Calculons $g(6)$ puis déduisons-en $(g^{-1})'\left(-\frac{14}{3}\right)$.

$g(6) \ = -6 + 1 + \frac{1}{\sqrt{6+3}} = -5 + \frac{1}{3} = -\frac{14}{3}$ $\qquad \boxed{g(6) = -\frac{14}{3}}$

$(g^{-1})'\left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{1}{g'(6)} = \frac{1}{-\left(1+\frac{1}{2(6+3)\sqrt{6+3}}\right)} = \frac{1}{-\left(1+\frac{1}{54}\right)} = \frac{1}{-\frac{55}{54}} = -\frac{54}{55}$

$\boxed{(g^{-1})'\left(-\frac{14}{3}\right) \ = -\frac{54}{55}}$

d. Construisons (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé.



M. NDIAYE LYCEE DE MAL