République du Sénégal
Ministère de l'Education Nationale
INSPECTION D'ACADEMIE DE TAMBACOUNDA
CELLULE ZONALE DE KOUMPENTOUM
ANNEE SCOLAIRE 2023-2024

DEVOIR ZONAL DU PREMIER SEMESTRE _ ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Classe de TS2 – Durée : 4 heures – Coefficient : 5

NB : **La qualité de la rédaction, la clarté et la précision seront tenues en compte dans la correction. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.**

Exercice 1 — 3 points

A. Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est juste. Choisis puis justifie cette réponse. (**0,25pt** par réponse juste et **0,25pt** pour la justification)

1. Soit A un point d'affixe $z = x + iy$. A est sur l'axe des abscisse si :

a) $x = 0$ | **b)** $y = 0$ | **c)** $x \neq 0$ et $y \neq 0$

2. L'écriture exponentielle du nombre $z = -1 + i\sqrt{3}$ est :

a) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ | **b)** $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | **c)** $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ | **d)** $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. Soit z un nombre complexe dont un de ses arguments est θ. Un argument de $z^2(1+i)$ est :

a) $\theta^2 - \frac{\pi}{4}$ | b) $2\theta - \frac{\pi}{4}$ | c) $2\theta + \frac{\pi}{4}$

4. Soit $z = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. La forme algébrique de z^{2024} est :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **b)** i | **c)** 1 | **d)** $1 + i$

B. Répondre par **vraie** ou **faux** aux affirmations suivantes. (**0,25pt** par réponse juste)

a. Toute suite croissante et majorée converge.
b. Toute suite décroissante et majorée converge.
c. Une suite arithmétique est décroissante si et seulement si sa raison est positive.
d. Si q est un nombre réel tel que : $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 — 4 points

Soit $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (8-4i)z + 4i - 12$.

1. **a.** Montrer que le polynôme $P(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera. **0,5pt**
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. **0,5pt**

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A(-2i)$; $B(1+i)$; $C(4+2i)$ et $I(2)$.
a. Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$. **0,25pt**
b. Placer les points A, B, C et I dans le repère. **0,5pt**

3. **a.** Calculer $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right|$. **0,5pt**
b. En déduire la nature du triangle ABC. **0,25pt**

4. Soit D le symétrique de B par rapport au point I.
a. Déterminer l'affixe Z_D du point D puis placer D dans le repère. **0,5pt**
b. Montrer que $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} \in i\mathbb{R}^*$. **0,5pt**
c. En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un losange. **0,5pt**

Exercice 3 -- **5 points**

Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de h. **1pt**
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=h(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0<u_n<u_{n+1}<1$. **1pt**

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,5pt**

   c. Montrer que pour tout $x\in[-\frac{1}{2};\ +\infty[,\ |h'(x)|\leq\frac{1}{2}$. **0,5pt**

   d. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|u_n-1|$. **0,5pt**

   e. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. **1pt**

   d. Retrouver la limite de la suite (u_n). **0,5pt**

Problème -- **8 points**

Soit $f(x)=\begin{cases} -x+1+\frac{1}{\sqrt{x+3}} & si\ x\in[1;\ +\infty[\\ x-\frac{1}{2}+\sqrt{|x^2-1|} & si\ \ x\in]-\infty;1[\end{cases}$

1. Justifier que le domaine de définition de f est $D_f=\mathbb{R}$. **0,5pt**
2. Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue. **0,25pt**
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 1. **1pt**
4. Etudier les limites aux bornes de D_f. **0,5pt**
5. **a.** Montrer que la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$. **0,25pt**

   b. Préciser le comportement de (C_f) en $-\infty$. **0,25pt**
6. **a.** Calculer la fonction dérivée de f dans chacun des intervalles où elle est dérivable. **0,75pt**

   b. Montrer que $f'(x)$ est négative sur les intervalles $]-\infty\,;-1[$, $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[$ et $]1\,;\ +\infty[$ et positive sur $\left]-1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$. ***Indication*** *: sur* $]-1;1[$ *et sur* $]-\infty;\ -1[$ *on pourra poser* $f'(x)\leq 0$ *ensuite résoudre l'inéquation irrationnelle obtenue en utilisant*

   $\sqrt{A(x)}\leq ax+b\Leftrightarrow\begin{cases} ax+b\geq 0 \\ A(x)\geq 0 \\ A(x)\leq(ax+b)^2 \end{cases}$ **0,75pt**
7. Dresser le tableau de variation de f. **0,25pt**
8. Soit g la restriction de f sur $[1;\ +\infty[$.

   a. Montrer que g est une bijection. **0,5pt**

   b. Dresser le tableau de variation de g^{-1}. **0,25pt**

   c. Calculer $g(6)$; en déduire $(g^{-1})'\left(-\frac{14}{3}\right)$. **0,75pt**

   d. Construire (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé. **2pt**

BONNE CHANCE !