II- PROBABILITÉ CONDITIONNELLE:

Activité1 :

Le tableau ci-dessous donne le nombre de fumeurs et de non-fumeurs, hommes ou femmes dans une entreprise de 100 personnes.

	Hommes	Femmes
Fumeurs	40	10
Non-fumeurs	20	30

On choisit au hasard une personne parmi les cent.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

: « la personne choisie est un fumeur »

: « la personne choisie est un homme »

: « la personne choisie est un fumeur sachant c'est un homme »

2.a. Calculer $p(A\cap B)$.

b. Comparer $p(C)$ et $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Correction de l'activité 1 :

1. $p(A)=\dfrac{40+10}{100}=\dfrac{1}{2}$, $p(B)=\dfrac{40+20}{100}=\dfrac{3}{5}$ et $p(C)=\dfrac{40}{60}=\dfrac{2}{3}$.

2.a. $p(A\cap B)=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$.

b. $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{2}{3}$ donc $p(C)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Définition :

Soit $(\Omega,P(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini et A, B deux événements tel que $p(B)\neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A **sachant** que B est réalisé le réel noté $p(A/B)$ (ou $p_B(A)$) défini par $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Conséquence : *(Principes des probabilités composées)*

Si $p(B)\neq 0$ alors $p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$

Si $p(A)\neq 0$ alors $p(A\cap B)=p(A).p(B/A)$

Formules des probabilités totales :

Définiton :

Soit E un ensemble fini, les parties B_1, B_2,…, B_n forment une **partition** de E lorsqu'ils sont deux à deux **disjoints** et leur **réunion est** E.

Théorème : *(Formule des probabilités totales)*

Soit $(\Omega,P(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini.

Soit B_1, B_2,…, B_n des événements formant une **partition** de l'univers Ω tels que $p(B_i)\neq 0$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

Alors pour tout événement A, on a $p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i).p_{B_i}(A)$

Démonstration :

Les événements $A\cap B_1$, $A\cap B_2$,…, $A\cap B_n$ forment une partition de A.

D'après l'additivité de la probabilité p, on peut écrire :

$$p(A)=p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+\dots+p(A\cap B_n)=\sum_{i=1}^{n}p(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i).p(A/B_i).$$

MERSANI IMED

Cas particulier :

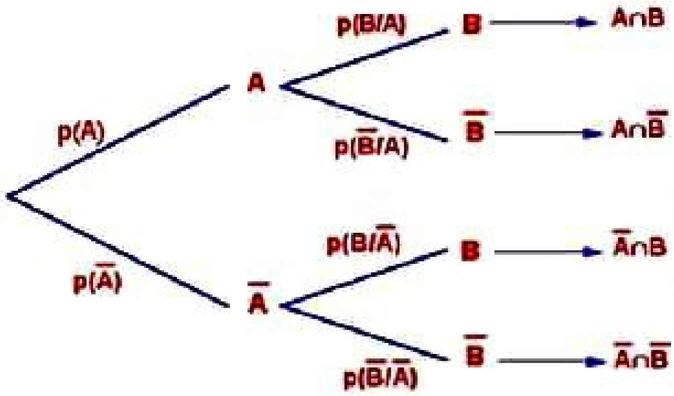
Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $p(B) \neq 0$ et $p(B) \neq 1$.

On sait que les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers Ω

donc pour tout événement A, $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(B).p(A/B) + p(\overline{B}).p(\overline{B}/A)$.

Arbre pondéré et règles de construction :

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité.



- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égal à 1.

  Exemple : $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$.

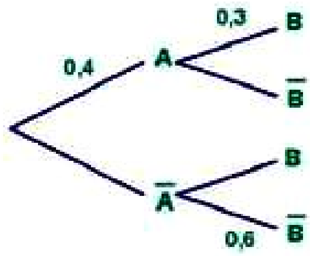
- La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

  Exemple : $p(A \cap B) = p(A).p_A(B)$.

Acivité2 :

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité ci-contre :

Répondre par vari ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse.



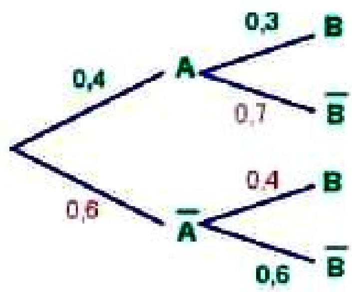
1. $p(\overline{A}) = 0,6$.

2. La probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à $0,6$.

3. $p(B) = 0,7$.

4. $p(A \cup B) = 0,64$.

Correction de l'activité 2 :



1. $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$. **VRAI**

2. $p(\overline{B}/A) = 1 - p(B/A) = 1 - 0,3 = 0,7$. **FAUX**

3. $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

$$= p(A)p(B/A) + p(\overline{A})p(B/\overline{A})$$

$$= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,4 = 0,36.$$ **FAUX**

4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(A \cap B)$

$$= p(A) + p(B) + p(A).p(B/A)$$

$$= 0,4 + 0,36 - 0,4 \times 0,3$$

$$= 0,64$$ **VRAI**

Activité3 :

Une agglomération est composée de deux citées C_1 et C_2.

La probabilité d'être un habitant de C_1 est $0,6$.

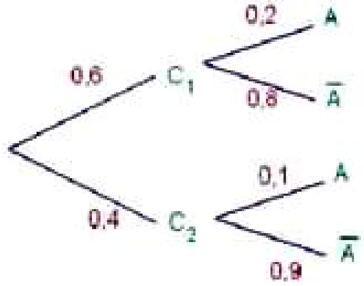
MERSANI IMED

La probabilité d'être un habitant enseignant de C_1 est $0,2$.

La probabilité d'être un habitant enseignant de C_2 est $0,1$.

Soit A l'événement : « être un enseignant de l'agglomération ».

Calculer $p(A)$.



Correction de l'activité3 :

$$p(A)=p(A\cap C_1)+p(A\cap C_2)$$
$$=p(C_1)p_{C_1}(A)+p(C_2)p_{C_2}(A)$$
$$=0,6\times0,2+0,4\times0,1=0,16$$

Activité4 :

Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation m.

Les employés d'une entreprise sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

- Le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité m.
- Parmi les employés qui on choisi la modalité m, 80% sont atteints d'une maladie chronique.
- Parmi les employés qui n'on pas choisi la modalité m, 75% sont atteints d'une maladie chronique.

On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :

M : « l'employé choisit la modalité m »

C : « l'employé est attient d'une maladie chronique »

1.a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(M)$, $p_M(C)$ et $p_{\overline{M}}(C)$.

b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2.a. Calculer la probabilité que cet employé ait choisit la modalité m et soit attient d'une maladie chronique.

b. Calculer la probabilité que cet employé n'ait pas choisit la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.

c. En déduire $p(C)$.

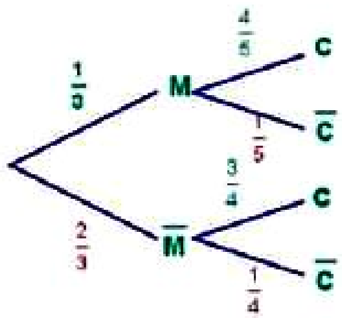
3. Soit l'événement E : « l'employé choisit la modalité m, sachant qu'il est attient d'une maladie chronique.

Montrer que $p(E)=\frac{8}{23}$.

Correction de l'activité4 :

1.a. $p(M)=\frac{1}{3}$, $p_M(C)=0,8=\frac{4}{5}$ et $p_{\overline{M}}(C)=0,75=\frac{3}{4}$.

b. Arbre de probabilité



2.a. $p(M\cap C)=p(M)p_M(C)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$.

b. $p(\overline{M}\cap C)=p(\overline{M})p_{\overline{M}}(C)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.

c. $p(C)=p(M\cap C)+p(\overline{M}\cap C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{2}=\frac{23}{30}$

3. $p(E)=p_C(M)=\frac{p(M\cap C)}{p(C)}=\frac{4}{15}\times\frac{30}{23}=\frac{8}{23}$.

Activité5 :

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

U_1 contient deux boules rouges et six boules noires.

U_2 contient trois boules rouges, quatre boules noires et deux boules blanches.

U_3 contient une boule rouge et quatre boules blanches.

On lance une fois un dé régulier dont les faces sont numérotés de 1 à 6.

- Si le résultat est 1, on tire une boule au hasard de U_1.
- Si le résultat est 2, 3 ou 5, on tire une boule au hasard de U_2.
- Si le résultat est 4 ou 6, on tire une boule au hasard de U_3.

Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer une boule rouge »

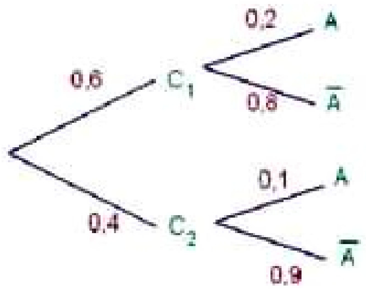
MERSANI IMED

La probabilité d'être un habitant enseignant de C_1 est $0,2$.

La probabilité d'être un habitant enseignant de C_2 est $0,1$.

Soit A l'événement : « être un enseignant de l'agglomération ».

Calculer $p(A)$.



Correction de l'activité3 :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A\cap C_1)+p(A\cap C_2) \\ &= p(C_1)p_{C_1}(A)+p(C_2)p_{C_2}(A) \\ &= 0,6\times 0,2+0,4\times 0,1 = 0,16 \end{aligned}$$

Activité4 :

Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation m.

Les employés d'une entreprise sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

- Le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité m.
- Parmi les employés qui on choisi la modalité m, 80% sont atteints d'une maladie chronique.
- Parmi les employés qui n'on pas choisi la modalité m, 75% sont atteints d'une maladie chronique.

On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :

M : « l'employé choisit la modalité m »

C : « l'employé est attient d'une maladie chronique »

1.a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(M)$, $p_M(C)$ et $p_{\overline{M}}(C)$.

b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2.a. Calculer la probabilité que cet employé ait choisit la modalité m et soit attient d'une maladie chronique.

b. Calculer la probabilité que cet employé n'ait pas choisit la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.

c. En déduire $p(C)$.

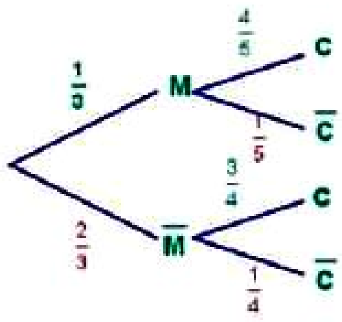
3. Soit l'événement E : « l'employé choisit la modalité m, sachant qu'il est attient d'une maladie chronique.

Montrer que $p(E)=\dfrac{8}{23}$.

Correction de l'activité4 :

1.a. $p(M)=\dfrac{1}{3}$, $p_M(C)=0,8 =\dfrac{4}{5}$ et $p_{\overline{M}}(C)=0,75 =\dfrac{3}{4}$.

b. Arbre de probabilité



2.a. $p(M\cap C)=p(M)\,p_M(C)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}$.

b. $p(\overline{M}\cap C)=p(\overline{M})\,p_{\overline{M}}(C)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$.

c. $p(C)=p(M\cap C)+p(\overline{M}\cap C)=\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{23}{30}$

3. $p(E)=p_C(M)=\dfrac{p(M\cap C)}{p(C)}=\dfrac{4}{15}\times\dfrac{30}{23}=\dfrac{8}{23}$.

Activité5 :

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

U_1 contient deux boules rouges et six boules noires.

U_2 contient trois boules rouges, quatre boules noires et deux boules blanches.

U_3 contient une boule rouge et quatre boules blanches.

On lance une fois un dé régulier dont les faces sont numérotés de 1 à 6.

- Si le résultat est 1, on tire une boule au hasard de U_1.
- Si le résultat est 2, 3 ou 5, on tire une boule au hasard de U_2.
- Si le résultat est 4 ou 6, on tire une boule au hasard de U_3.

Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer une boule rouge »

MERSANI IMED

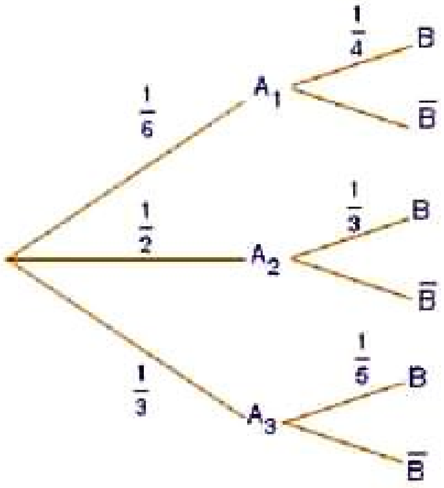
Correction de l'activité5 :

Considérons les événements :

A_1 : « le dé donne le résultat 1 » $\quad p(A_1)=\dfrac{1}{6}$

A_2 : « le dé donne le résultat 2, 3 ou 5 » $\quad p(A_2)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

A_3 : « le dé donne 4 ou 6 » $\quad p(A_3)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$



On peut construire un arbre pondéré.

$p(B/A_1)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de U_1

donc $p(B/A_1)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$.

de même, on vérifie que $p(B/A_2)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ et que $p(B/A_3)=\dfrac{1}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+p(A_3\cap B) = p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{40}.$$

Propriétés :

Soit $(\Omega,P(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini, B un événement de probabilité non nulle et A_1 et A_2 deux événements incompatibles.

On a $p_B(\Omega)=1$ et $p_B(A_1\cup A_2)=p_B(A_1)+p_B(A_2)$.

Formules de Bayes :

Actvité6 :

Soit $(\Omega,P(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini.

Soient A et B deux événements tel que $p(B)\neq 0$, $p(B)\neq 1$ et $p(A)\neq 0$.

Montrer que $p(B/A)=\dfrac{p(B).p(A/B)}{p(B)p(A/B)+p(\overline{B}).p(A/\overline{B})}$.

Correction de l'activité 6 :

On sait que $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$, $p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$

et $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B}) = p(B)p(A/B)+p(\overline{B})p(A/\overline{B})$

alors $p(B/A)=\dfrac{p(B).p(A/B)}{p(B).p(A/B)+p(\overline{B})p(A/\overline{B})}$ (Formules de Bayes).

Evénements indépendants

Définition :

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

Dans le cas où $p(B)\neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A, c'est-à-dire $p(A/B)=p(A)$.

Activité7 :

On lance un dé parfait dont les faces sont numérotés de 1 à 6.

Soient les événements A : « obtenir un numéro pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ».

Montrer que les événements A et B sont indépendants.

Correction de l'activité 7 :

$A=\{2,4,6\}$ et $B=\{3,6\}$ donc $A\cap B=\{6\}$.

MERSANI IMEL

$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$ donc $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ d'où les événements A et B sont indépendants.

Activité 8 :

Soit A et B deux événements indépendants tels que $p(A)=0,2$ et $p(B)=0,3$.

Calculer les probabilités $p(A\cap B)$ et $p(A\cup B)$.

Correction de l'activité8 :

Les événements A et B sont indépendants donc $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=0,06$.

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,2+0,3-0,06=0,44$

Remarque :

Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles**.
Deux événements A et B sont **indépendants** si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.
Deux événements A et B sont **incompatibles** si $A\cap B=\varnothing$

À faire les exercices suivants :

Exercice1 :

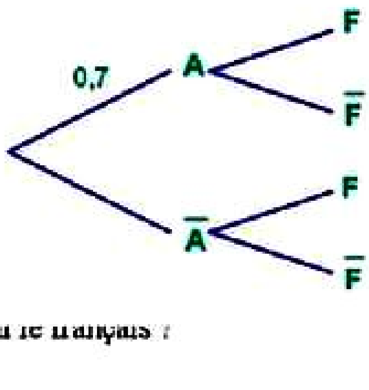
Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptibles de présenter deux défauts a et b.
Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivant :

- 3% des climatiseurs présentent le défaut a.
- Parmi les climatiseurs présentant le défaut a, 8% présentent le défaut b.
- Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a, 2% présentent le défaut b.

On prélève au hasard un climatiseur dans la production. On désigne par A et B les évènements suivants :
A : « le climatiseur présente le défaut a »
B : « le climatiseur présente le défaut b »
1. Construire un arbre de probabilité décrivant cette situation.
2. Pour cette question, on donnera les résultats à quatre chiffres après la virgule.
a. Quelle est la probabilité que le climatiseur présente à la fois les deux défauts a et b ?
b. Quelle est la probabilité que le climatiseur présente le défaut b ?
c. Quelle est la probabilité que le climatiseur ne présente aucun défaut ?

Exercice2 :

Lors d'un séminaire, on a constaté que 70% des participants parlent l'anglais, 63% parlent le français et 42% parlent à la fois l'anglais et le français.
Un journaliste veut interviewer au hasard l'un des participants à ce séminaire.
On désigne par A et F les évènements suivants :
A : « le participant choisi pour l'interview parle l'anglais »
F : « Le participant choisi pour l'interview parle le français »



1. Justifier que $p_A(F)=0,6$. En déduire la valeur de $p_A(\overline{F})$.
2. Justifier que $p(F\cap\overline{A})=0,21$.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
4. Quelle est la probabilité que le participant interviewé ne parle ni l'anglais ni le français ?

Exercice3 :

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.
Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre.
Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites "hors calibre", sont rejetées.
Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre,
5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et
4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar.
Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.

MERSANI IMED

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante :
un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de "bon calibre" ou "hors calibre". Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

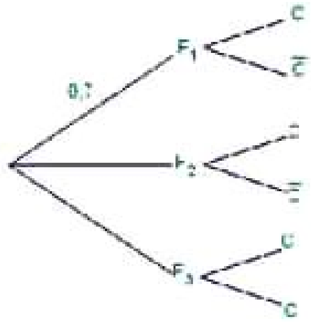
On appellera : F_1 l'événement : "la pomme prélevée provient du premier producteur"

F_2 l'événement : "la pomme prélevée provient du deuxième producteur"

F_3 l'événement : "la pomme prélevée provient du troisième producteur"

C l'événement : "la pomme prélevée a un bon calibre"

$\overline{C}$ l'événement : "la pomme prélevée est hors calibre".



1. Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.
2. Recopier sur votre copie et compléter l'arbre ci-contre.
3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,8465.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : "Cette pomme provient très probablement du premier producteur". Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.

Exercice4 :

On donne un univers E, deux événements **indépendants** A et B avec $p(A)=0,4$ et $p(B)=0,6$.

1. Montrer que les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Calculer $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p_B(A)$.

Exercice5 :

Un individu essayant de réduire sa consommation de cigarettes, applique les conditions suivantes :

C_1 : s'il reste un jour sans fumer alors la probabilité pour qu'il fume le lendemain est de 0,2.

C_2 : par contre s'il cède et fume un jour alors probabilité qu'il fume le lendemain est égale à 0,7.

On note F_n la probabilité « l'individu fume le $n^{ième}$ jour » et p_n la probabilité de l'événement F_n.

1/ Déterminer les probabilités des événements (F_{n+1}/F_n), $(\overline{F_{n+1}}/F_n)$, $(F_{n+1}/\overline{F_n})$ et $(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})$.

2/ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $p_{n+1}=0,5p_n+0,2$.

3/ Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n=p_n-0,4$.

a/ Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la limite.

b/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter.

MERSANI IMED