INSPECTION D'ACADEMIE DE TAMBA **CELLULE REGIONALE DE MATHS**	**Année scolaire**: 2022-2023 **Niveau**: Terminale S2

SERIE N°1 SUR NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1:

1) Ecrire le nombre complexe z sous la forme algèbrique:
   a) $z = (1+i)(1-2i)$
   b) $z = 2(3+2i) + 3(-4+3i)$
   c) $z = \dfrac{1-i}{2i}$
   d) $z = \dfrac{3-4i}{7+5i}$
   e) $z = \dfrac{(3-2i)(5+i)}{5-i}$

2) On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Calculez: $A = j^2$; $B = 1+j$; $C = 1+j+j^2$;
   $D = \dfrac{1+j}{(1-i)^2}$; $E = \dfrac{1-j}{(1+i)^2}$.

EXERCICE 2:

1) a) Ecrivez le complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonomètrique puis sous forme exponentielle.
   b) Donnez le module et un argument de $Z = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) a) Donnez un module et un argument de $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$.
   b) Déduisez-en le module et un argument de chacun des complexes $u = \dfrac{z_1}{z_2}$ et u^5.
   c) Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

EXERCICE 3:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.

1) a) Placez les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -1+i$, $z_B = 2+i$ et $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
   b) Calculez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   c) Calculez les distances AB, AC et BC. Le triangle ABC est-il rectangle en A?

2) On considère les points E, F et G d'affixes respectives $z_E = -\frac{1}{3} - 2i$, $z_F = 1+2i$ et $z_G = \frac{7}{3} + 6i$.
   a) Déterminez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.
   b) En déduire que les points E, F et G sont alignés.

EXERCICE 4:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z:

1) $\dfrac{iz}{z+i} = 1+2i$
2) $2z + \overline{z} = i - z$
3) $z^2 = 3+4i$
4) $z^2 + z + 1 = 0$
5) $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$
6) $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$

EXERCICE 5:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $a = 2+2i\sqrt{3}$, $b = 2-2i\sqrt{3}$, $c = -4$ et $d = -1+i\sqrt{3}$.
Démontrez que:

a) A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
b) D est le milieu de $[AC]$.
c) le triangle BDA est rectangle en D.

EXERCICE 6:

1) Mettre sous forme exponentielle:
   $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_1^2$, $z_3 = \dfrac{2z_1}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

2) Soit $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$.
   a) Déterminez la forme exponentielle de Z.
   b) Déterminez la forme algèbrique de Z.
   En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) On donne les nombres complexes suivants:
   $a = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $b = -5(1+i\sqrt{3})$.
   a) Déterminer le module et un argument de a, b et $\dfrac{b}{a}$.
   b) Soit Z le nombre complexe tel que $aZ = b$; Ecrire Z sous forme algèbrique et sous forme trigonomètrique.
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 7:

Dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points
$A(1+i)$, $B(-3-i)$ et $C(2i)$.

1) Placez les points A, B , C et déterminez la nature du triangle ABC.
2) Déterminez l'affixe du point D tel que ADBC soit un parallèlogramme.

3) Déterminez l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que:

a) $|z-2i| = 3$

b) $|z-1-i| = |z+3+i|$

c) $|\overline{z}-1+i| = 1$

d) $|iz+2| = 3$

4) En utilisant la forme algèbrique de z, montrer que l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $\dfrac{z+1}{z-i} = 2$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

5) Pour tout nombre complexe $z \neq -1+2i$, on pose $Z = \dfrac{z-2+4i}{z+1-2i}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que:

a) $|Z| = 1$

b) $|Z| = 2$

c) Z soit un réel.

d) Z soit un imaginaire pur.

6) Pour tout nombre complexe $z \neq i$, on pose $U = \dfrac{z+i}{z-i}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

a) $U \in \mathbb{R}_+^*$

b) $U \in \mathbb{R}_-^*$

c) $U \in i\mathbb{R}$

EXERCICE 8:

Linéarisez les expressions suivantes en utilisant les formules d'Euler:

1) $f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$

2) $g(x) = \cos^2(2x)\sin(3x)$

3) $h(x) = \cos^3(x)\sin(2x)$

4) $p(x) = \cos^4(x)$

5) $q(x) = \cos^4(x)\sin(x)$

EXERCICE 9:

1) a) Déterminer le nombre complexe a tel que $a(1+i) = 1+3i$ puis calculer ia^2.

b) Montrer que l'équation $z^2-(1+3i)z-4+3i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$ a pour solutions a et ia.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+i$ et $b = -1+2i$.

a) Placer A et B dans le repère.

b) Vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB.

3) Soit C le point d'affixe $c = 1+\frac{1}{2}i$.

a) Déterminer l'affixe d du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que mes$\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) On note J, K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[DA]$, $[CD]$ et $[BC]$.
Déterminer la nature exacte du quadrilatère $JKLM$ et justifier la réponse.

EXERCICE 10:

1) Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$.
En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les solutions de l'équation $z^2 = i$.

2) On pose $P\left(z\right) = z^3+z^2-iz-i$ où z est un nombre complexe.

a) Démontrer que l'équation $P\left(z\right) = 0$ admet une solution réelle α que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation $P\left(z\right) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_C = -1$.

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B.

b) Placez avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.

4) Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.

a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.

b) Démontrer que $Z = \dfrac{z_D-z_C}{z_A-z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

c) Interpréter $|Z|$ et $Arg(Z)$.

EXERCICE 11:

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$f(z) = z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12).$$

1) a) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.

b) Déterminer un polynôme du second degré P à coefficients complexes tels que: pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z-z_1)P(z)$.

2) a) Montrez que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_3 la solution différente de z_1 et z_2.

3) Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
Montrez que ces trois points sont alignés.