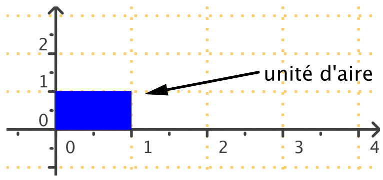
COURS TERMINALE S LE CALCUL INTEGRAL

A. Notion d'intégrale

1. Aire sous la courbe

On définit le domaine plan, qu'on appellera aire sous la courbe C représentative d'une fonction positive f sur un intervalle $[a; b]$, la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe C.
Le plan est rapporté à un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
L'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle défini par les unités des axes.



2. Intégrale d'une fonction positive

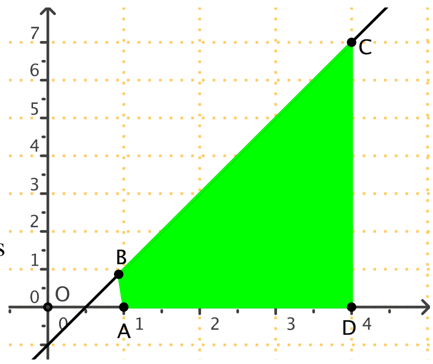
Définition : On considère une fonction f définie et positive sur un intervalle I, deux réels a et b de I tels que $a < b$, et C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

On définit l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$, notée $\int_a^b f(t)\,dt$ comme l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe C.

Remarque: la variable t est appelée une variable muette. On peut écrire $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \ldots$

Exemple: On cherche à calculer $\int_1^4 (2t-1)\,dt$. On trace la droite représentative de la fonction f définie sur [1; 4] par $f(t) = 2t - 1$. Cette fonction est positive sur cet intervalle, et cette intégrale est égale à l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$ et la droite (d). Cette partie du plan est un trapèze dont l'aire égale $\dfrac{(petite\ base + grande\ base) \times hauteur}{2}$. Les sommets du trapèze sont les points de coordonnées A(1; 0), B(1; 1), C(4; 7), D(4; 0).

L'aire est donc égale à $\dfrac{(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\times \mathrm{AD}}{2} = \dfrac{(1+7)\times 3}{2}$ = 12 unités d'aire.

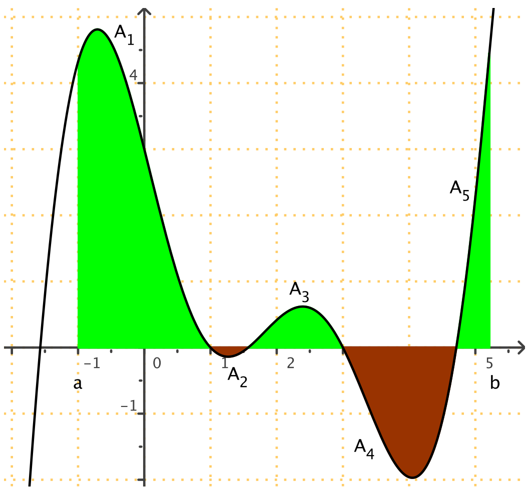


3. Extension à une fonction de signe quelconque

Si la fonction f continue sur $[a; b]$ n'est pas positive sur tout l'intervalle $[a; b]$, alors l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe C s'obtient de la façon suivante:

Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt = -$ A.

Si f est de signe quelconque sur $[a; b]$, alors on détermine les intervalles sur lesquels f est positive et ceux sur lesquels f est négative, et $\int_a^b f(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$ (sur la figure ci-contre).



4. Valeur moyenne d'une fonction

Définition: On considère une fonction f définie sur un intervalle I, deux réels a et b de I tels que $a < b$.

La <u>valeur moyenne</u> de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

B. Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés algébriques

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et les réels a, b et c de I :

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.
- On admet que $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$.
- <u>Relation de Chasles</u>: $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$.
- <u>Linéarité</u> : $\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$. $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

2. Intégrales et inégalités

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I et les réels a et b de I tels que $a \leqslant b$:

- <u>Positivité</u>: Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_b^a f(t)\,dt \geqslant 0$.
- <u>Ordre</u> : Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\int_b^a f(t)\,dt \geqslant \int_b^a g(t)\,dt$.
- <u>Inégalité de la moyenne</u> : Si pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_b^a f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$, c'est-à-dire que la valeur moyenne μ de f vérifie $m \leqslant \mu \leqslant M$.

  Si pour tout x de $[a, b]$, $|f(x)| \leqslant M$, alors $\left|\int_b^a f(t)\,dt\right| \leqslant M(b-a)$,

C. Primitives d'une fonction

1. Notion de primitive

Définition: On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple: Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ est la fonction F définie par $F(x) = x^2 - x + 1$.

Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

2. Ensemble des primitives d'une fonction et conditions initiales

Propriété : Toute fonction f continue sur I admet une infinité de primitives sur I.
Si la fonction F en est une, alors les autres primitives de f sont les fonctions de la forme $F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 dans I, et y_0 un réel quelconque. Alors la fonction f admet une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$ (appelée condition initiale).

Exemple : La primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ telle que $F(1) = 2$ est $F(x) = \dfrac{x^3+5}{3}$.

3. Intégrale et primitive

Théorème : On considère une fonction f continue sur un intervalle I et a un réel de I.

La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : La démonstration est faite dans le cas où la fonction f est positive et croissante. Soit x_0 dans I et $x \geqslant x_0$.
Pour tout réel $t \in [x_0 ; x]$, on a $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$ par la croissance de la fonction f. Ainsi, par le théorème de la moyenne,

$f(x_0)(x - x_0) \leqslant \int_{x_0}^x f(t)\,dt \leqslant f(x)(x - x_0)$.

Pour c dans I, Posons $S(c)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation

$x = a$ et $x = c$. Par la relation de Chasles, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} f(t)\,dt - \int_{a}^{x_0} f(t)\,dt = S(x) - S(x_0)$.

Donc $f(x_0)(x - x_0) \leqslant S(x) - S(x_0) \leqslant f(x)(x - x_0)$, d'où $f(x_0) \leqslant \dfrac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0} \leqslant f(x)$. La fonction f étant continue,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, et par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. Ainsi la fonction S est dérivable en x_0 et $S'(x_0) = f(x_0)$. Ceci est vrai pour tout x_0 de I, donc S est dérivable sur I et $S'(x) = f(x)$. Donc S est une primitive de f.

De plus, $S(a) = \int_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$, donc S est la primitive de f qui s'annule en a.

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f.

Notation : $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration : Soit F la primitive de f qui s'annule en a. Alors $F(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$.

Soit G une primitive quelconque de f. On sait que G est de la forme $G(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$.

4. Tableau des primitives

Dans le tableau, u' est une fonction définie et continue sur l'intervalle I.

Fonction	Primitives	Définie sur
$f(x) = a$ (constante)	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ si $n < 0$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
au'	au	I
$u'e^u$	e^u	I
$u'u^n$ où $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	I si $n \geqslant 0$ et I $\cap \{x, u(x) \neq 0\}$ si $n < 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ sur I
	$\ln(-u)$	$u(x) < 0$ sur I

Exemples :

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$;

$F(x) = \dfrac{-1}{x} + k$.

$f(x) = 2x\,e^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$;
$F(x) = e^{x^2-1} + k$.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est de la forme $u'u$;

$F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + k$.

D. Intégration par parties

Propriété: On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

Alors $\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\,dx$.

Démonstration : On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, ainsi $uv' = (uv)' - u'v$ et en intégrant ces deux fonctions sur $[a; b]$, on obtient $\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\,dx = \int_{a}^{b} (u(x)v(x))'\,dx - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\,dx$.

Application : On peut alors calculer des intégrales portant sur des fonctions dont on ne peut pas facilement déterminer une primitive. On peut aussi déterminer des primitives.

Exemples : a) Déterminer $\int_0^1 xe^x\,dx$. On pose $v'(x) = e^x$ et $u(x) = x$. Alors $v(x) = e^x$ et $u'(x) = 1$.

Ainsi $\int_0^1 xe^x\,dx = \left[x\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1e^1 - 0 - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$.

b) Déterminer une primitive de ln sur]0; +∞ [: On cherche par exemple la primitive F de ln qui s'annule en 1.

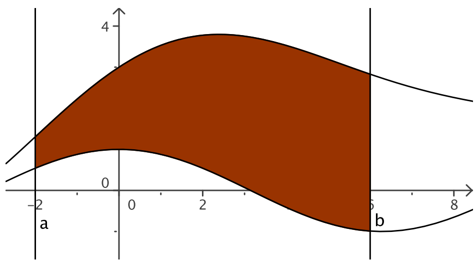
On a donc $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$. On pose $v'(x) = 1$ et $u(x) = \ln x$. Alors $v(x) = x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où $F(x) = \int_1^x \ln x\,dx = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}dt = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x 1\,dt = \left[t\ln t\right]_1^x - \left[t\right]_1^x = \left[t\ln t - t\right]_1^x = x\ln x - x - 1$.

Cas des fonctions de la forme $P(x)e^x$: on prend $v'(x) = e^x$ et $u(x) = P(x)$ où P est un polynôme.
Cas des fonctions de la forme $P(x)\ln x$: on prend $v'(x) = P(x)$ et $u(x) = \ln x$ où P est un polynôme.

E. Calculs d'aires et de volumes

1. Calculs d'aires

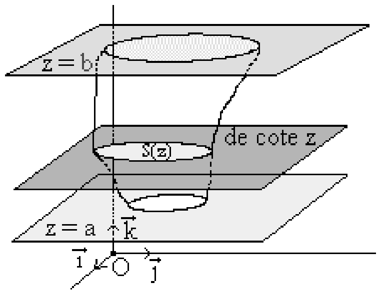


Théorème : Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, a et b deux réels de I tels que $a < b$.
On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal du plan.
Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire comprise entre les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à
$\int_a^b (g(x) - f(x))dx$ u.a.

Exemple: Déterminer l'aire comprise entre les courbes représentatives de la fonction carrée et de la fonction cube sur l'intervalle [0; 1].
Ces deux courbes se coupent en trois points d'abscisses solutions de l'équation $x^3 = x^2$, soit $x(x^2 - 1) = 0$, soit $x(x-1)(x+1) = 0$. Les solutions sont – 1, 0 et 1. Les solutions qui sont dans l'intervalle [0; 1] sont 0 et 1.
De plus, sur [0; 1], $x^3 \leqslant x^2$ (on peut le montrer à l'aide d'un tableau de signes). Donc l'aire cherchée est égale à

$$\int_a^b (x^2 - x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12} \text{ u.a.}$$

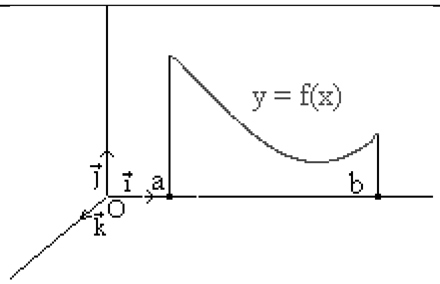
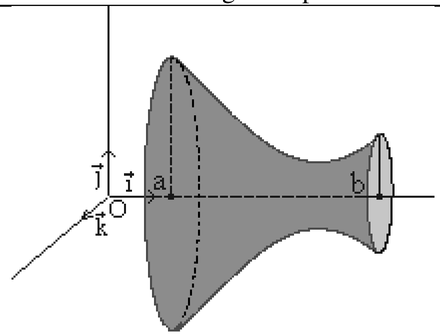
2. Calculs de volumes



L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On appelle unité de volume noté u.v. Le nombre $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$.
On considère un solide limité par les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$.
Pour tout z tel que b, on note P_z le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z,
S(z) l'aire de la section du solide par le plan P_z. Si S est une fonction continue sur $[a; b]$, alors le volume du solide est $V = \int_a^b S(z)dz$ u.v.

<u>Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe</u>

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la partie du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et l'axe $(O; \vec{i})$. En tournant autour de l'axe $(O; \vec{i})$, cette partie de plan engendre un solide de résolution limité par les plans parallèles à $(O; \vec{j}, \vec{k})$ d'abscisse respectives a et b. La section S du solide par le plan parallèle à $(O; \vec{j}, \vec{k})$ d'abscisse x est un disque de rayon $f(x)$, donc d'aire $\pi f(x)^2$. Le volume de ce solide est en unité de volume : $\int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$.

Courbe	Solide de révolution engendré par cette courbe
	

Exemple: On considère le paraboloïde construit en faisant tourner la parabole d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle [0; 1] autour de l'axe (Oy). Le paraboloïde est un solide compris entre les plans d'équations $y = 0$ et $y = 1$, et la section du solide par le plan perpendiculaire à (O; $\vec{j}$) est un disque de rayon x, donc d'aire $\pi x^2 = \pi y$.

Alors le volume de ce paraboloïde (bol) = $\int_0^1 \pi\, y\, dy = \left[\pi \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ u.v.